# سیستم های مخابراتی

## فصل دوم: نمونه برداری و چندی سازی

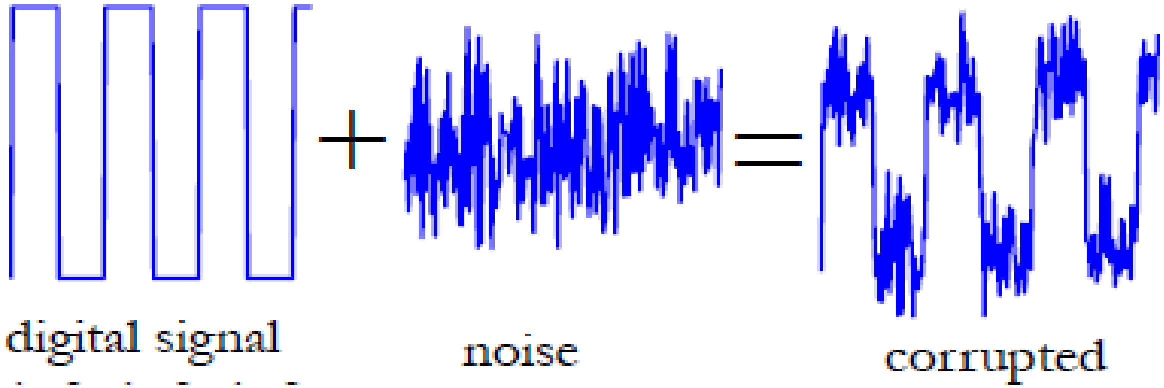
سید مهدی سجادیه

# مدولاسیون

- تبدیل سیگنال پیام به سیگنال مناسب در فرستنده = مدولاسیون
- عکس این کار در گیرنده = دی مدولاسیون

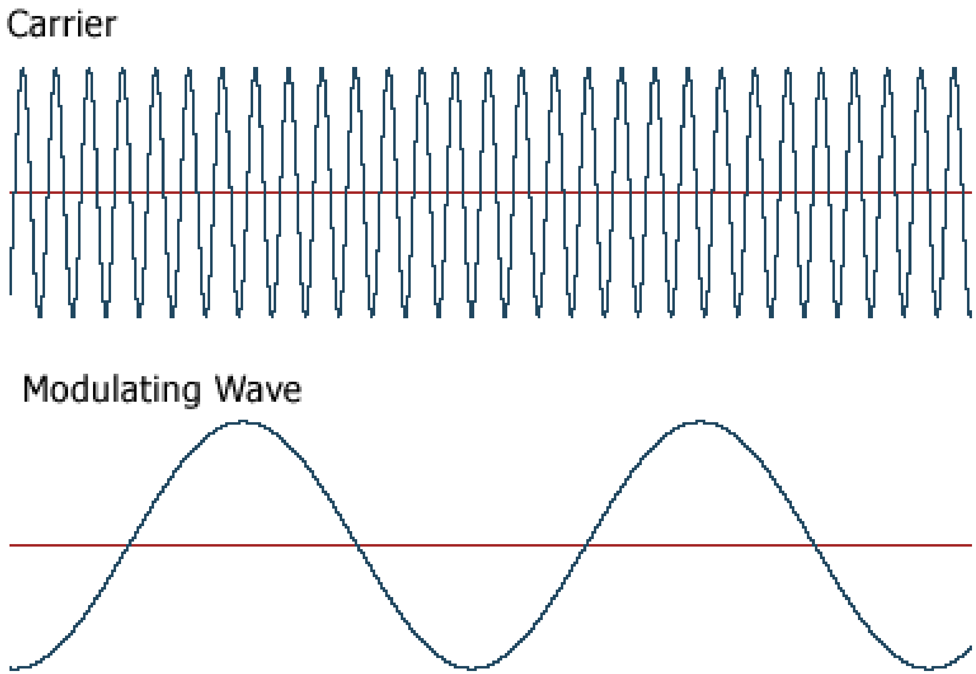
# مدولاسیون

- به علت اعوجاج و نویزی که در کانال ایجاد می شود سیگنال خروجی گیرنده دقیقاً مشابه فرستنده نیست.
- بعضی از روشهای مدولاسیون حساسیت کمتری نسبت به نویز و اعوجاج دارند.



# مدولاسیون

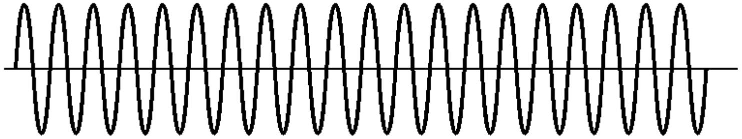
- مدولاسیون امواج پیوسته (CW) : یک موج سینوسی به عنوان حامل وجود دارد.



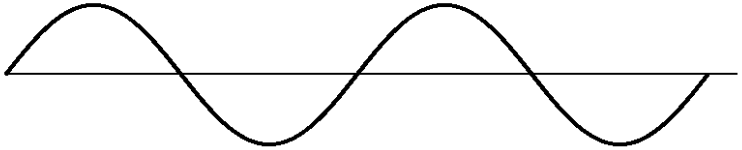

$$\mathrm{Re}\left[A\cdot e^{j(\omega\cdot t+\varphi)}\right]$$

# مدولاسیون امواج پیوسته

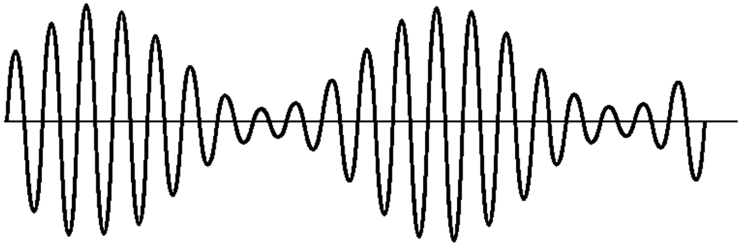
- مدولاسیون دامنه **( Amplitude Modulation (AM** سیگنال پیام دامنۀ حامل را عوض می کند.



(a)



(b)



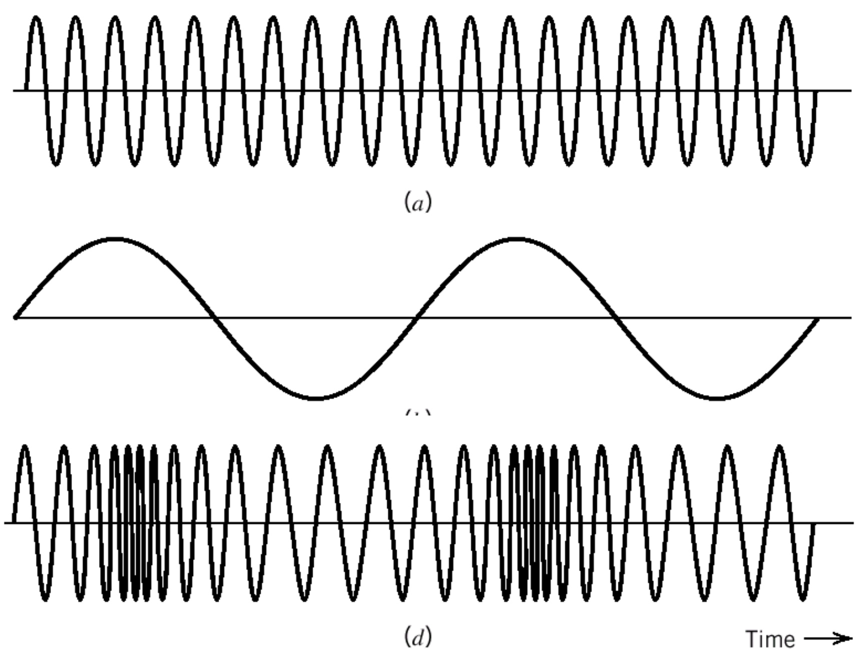
(c)

# مدولاسیون امواج پیوسته

- مدولاسیون زاویه ای: سیگنال پیام زاویهٔ حامل را عوض میکند.

$$\mathrm{Re}\left[A\cdot e^{j(\omega\cdot t+\varphi)}\right]$$

$$(\omega\cdot t+\varphi)$$



# انواع مدولاسیون زاویه ای

- مدولاسیون فرکانس **Frequency Modulation (FM )** سیگنال پیام فرکانس لحظه ای حامل را عوض می کند.

- مدولاسیون فاز **Phase Modulation (PM )**
سیگنال پیام فاز لحظه ای حامل را عوض می کند.

# مدولاسیون

- مدولاسیون امواج پیوسته : یک موج سینوسی به عنوان حامل وجود دارد.

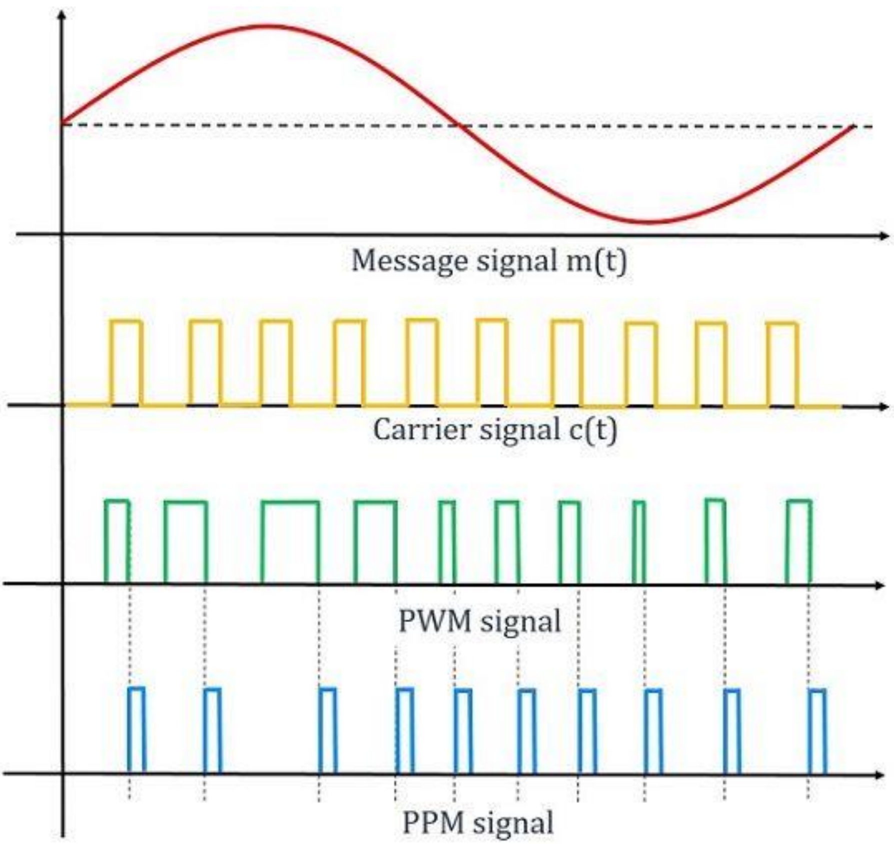
- مدولاسیون پالس : حامل یک دنبالهٔ پریودیک از پالسهای مستطیل شکل است.

# مدولاسیون پالس آنالوگ:

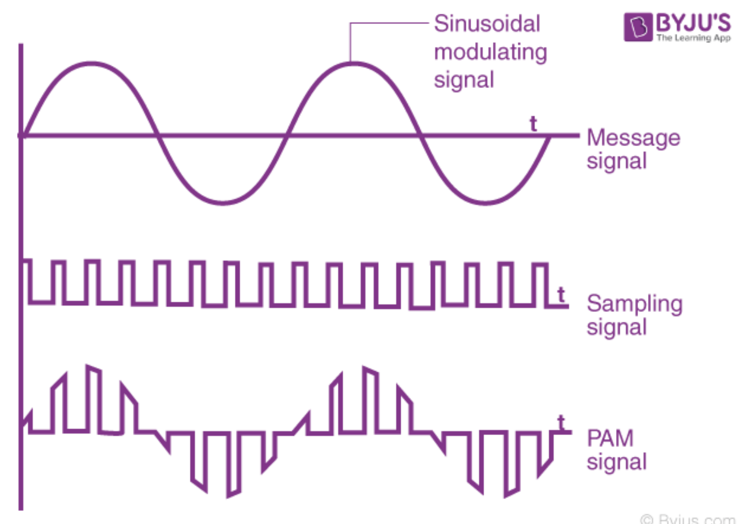
Pulse Amplitude Modulation : PAM

Pulse Width Modulation : PWM or PDM

Pulse Position Modulation : PPM

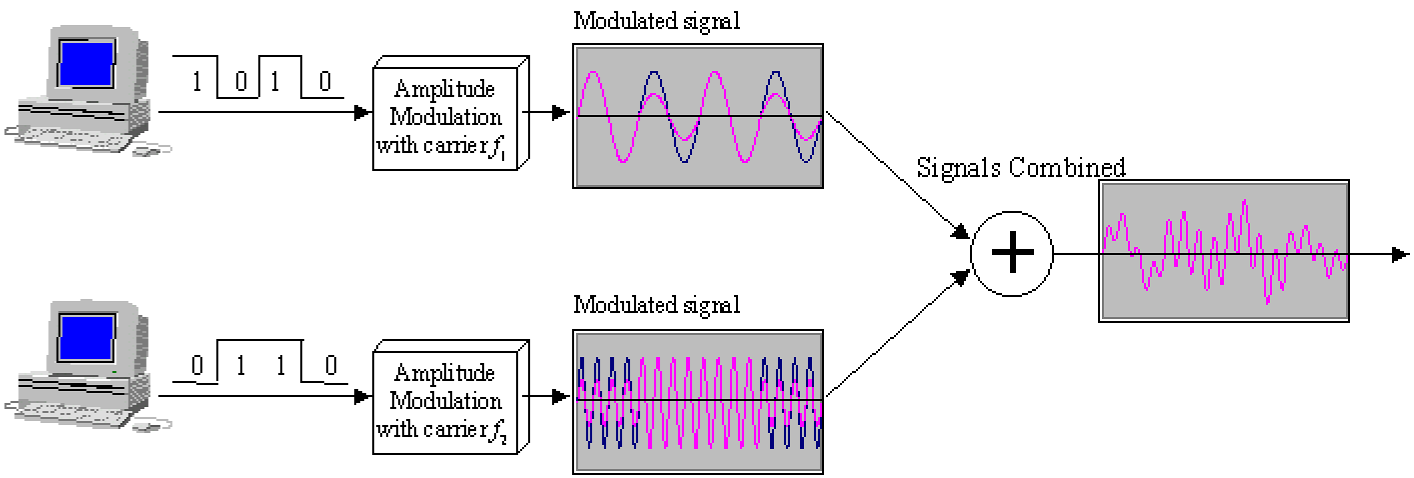



Waveform representation of PPM signal generation



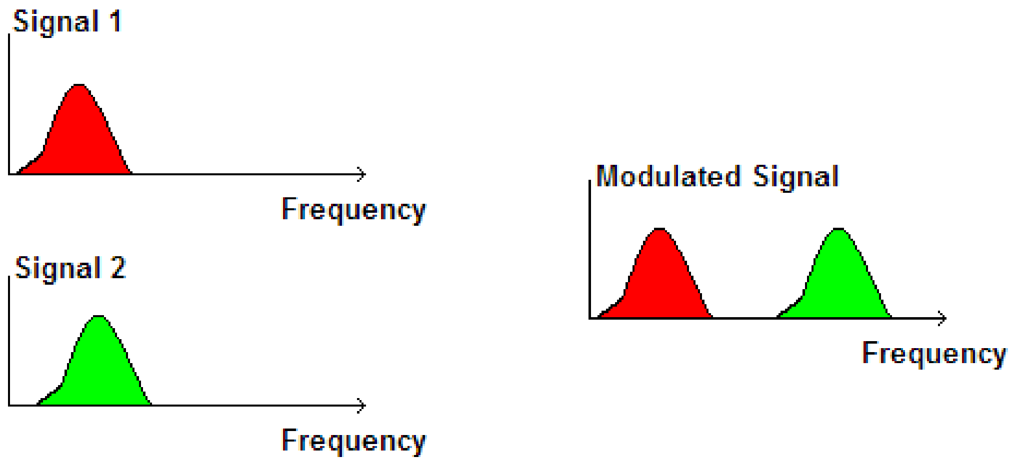
# مالتی پلکسینگ

- فرآیند ترکیب چندین سیگنال برای ارسال همزمان روی یک کانال را مالتی پلکسینگ گویند.



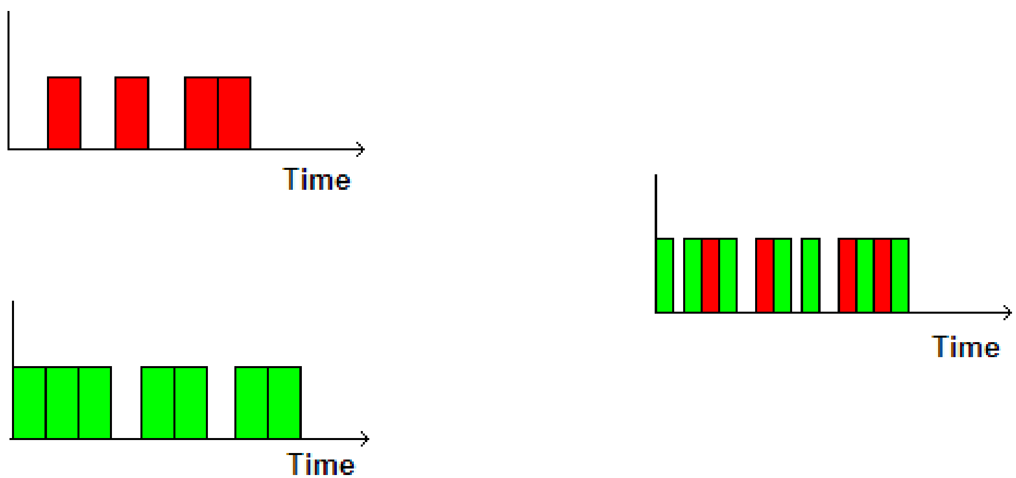
# Frequency Division Multiplexing (FDM)

- تخصیص حاملهای جداگانه به منابع اطلاعاتی متفاوت.
- در گیرنده بانک فیلتر لازم است.
- طیفها نباید هم پوشانی داشته باشند.



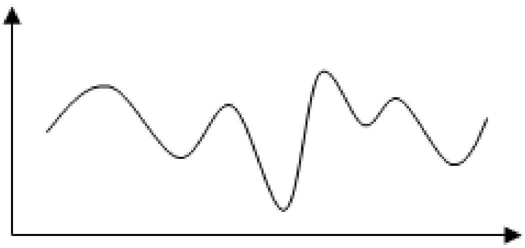
# Time Division Multiplexing (TDM)

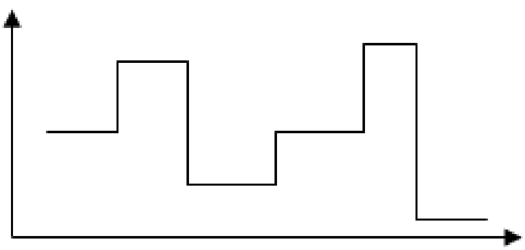
- مالتی پلکسینگ با استفاده از تقسیم زمانی
- تخصیص **time slot** های متفاوت به منابع اطلاعاتی متفاوت.



# Code Division Multiplexing (CDM)

- هر سیگنال پیام به صورت مخصوص به خود کد می شود.
- سیگنالها در طیف و زمان هم پوشانی دارند.





- سیگنال آنالوگ تغییرات پیوسته دارد.(اغلب سیگنالها طبیعت آنالوگ دارند.)
- پارامترهای سیگنال دیجیتال (مثل فرکانس، دامنه، فاز و ...)مقادیر محدودی می گیرند.

# مخابرات دیجیتال و مخابرات آنالوگ

- سیستم مخابراتی آنالوگ اطلاعات آنالوگ را به سیگنال مدوله شدهٔ آنالوگ تبدیل و ارسال می کند.
- سیستم مخابراتی دیجیتال اطلاعات را را به بیت تبدیل می کند و از سیگنال دیجیتال استفاده می کند.

# مخابرات دیجیتال و مخابرات آنالوگ

- منابع آنالوگ با نمونه برداری و کوانتیزاسیون به رشته بیت تبدیل می شوند.

- سیستم آنالوگ مفاهیم ساده تری دارد ولی در اجرا سخت تر است مثلاً به علت غیر خطی بودن و ...

- سیستم دیجیتال مفاهیم پیچیده تری دارد ولی در اجرا ساده تر و قابل اطمینان تر است.

- معیار عملکرد در سیستم آنالوگ شباهت است. $m(t) = \hat{m}(t)$

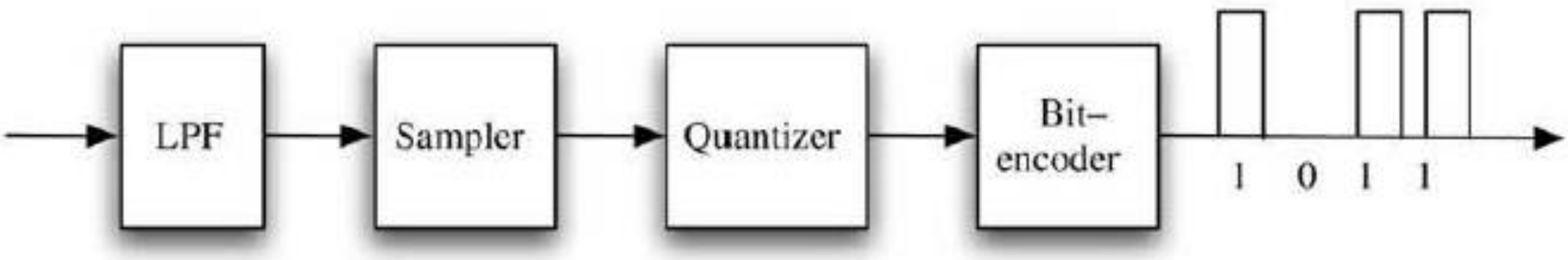
- معیار عملکرد در سیستم دیجیتال یکی نرخ داده (**bps**) و دیگری احتمال خطا ($P_b = \Pr ob(b_i \neq \hat{b}_i)$) است.

- $\mathbf{P_b}$ به توان سیگنال , مقدار نویز و مشخصات کانال بستگی دارد.

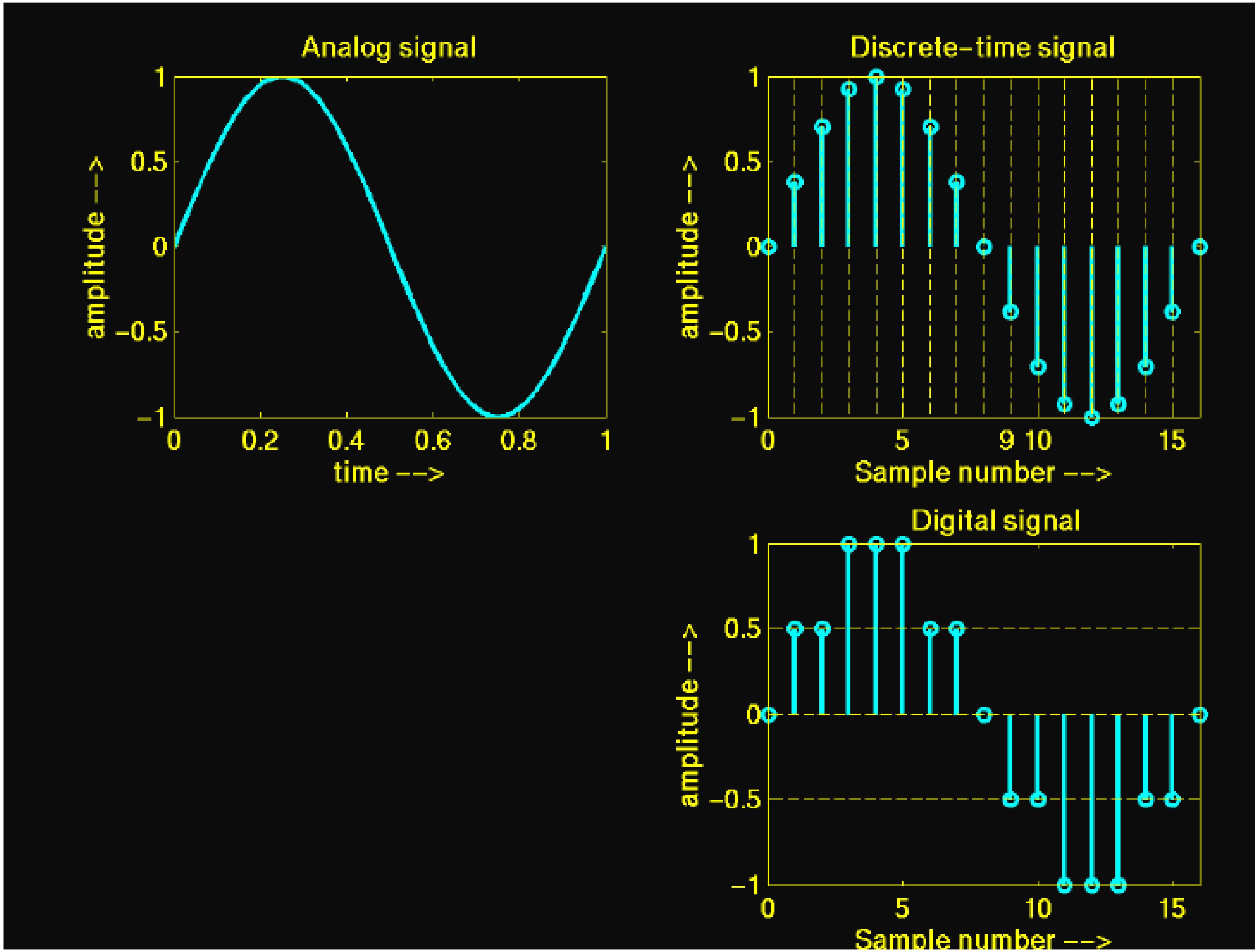
# فهرست مطالب

- نمونه برداری
- چندی سازی (کوانتیزاسیون)

# تبدیل سیگنال آنلوگ به باینری



# تبدیل سیگنال آنالوگ به دیجیتال



# نمونه برداري

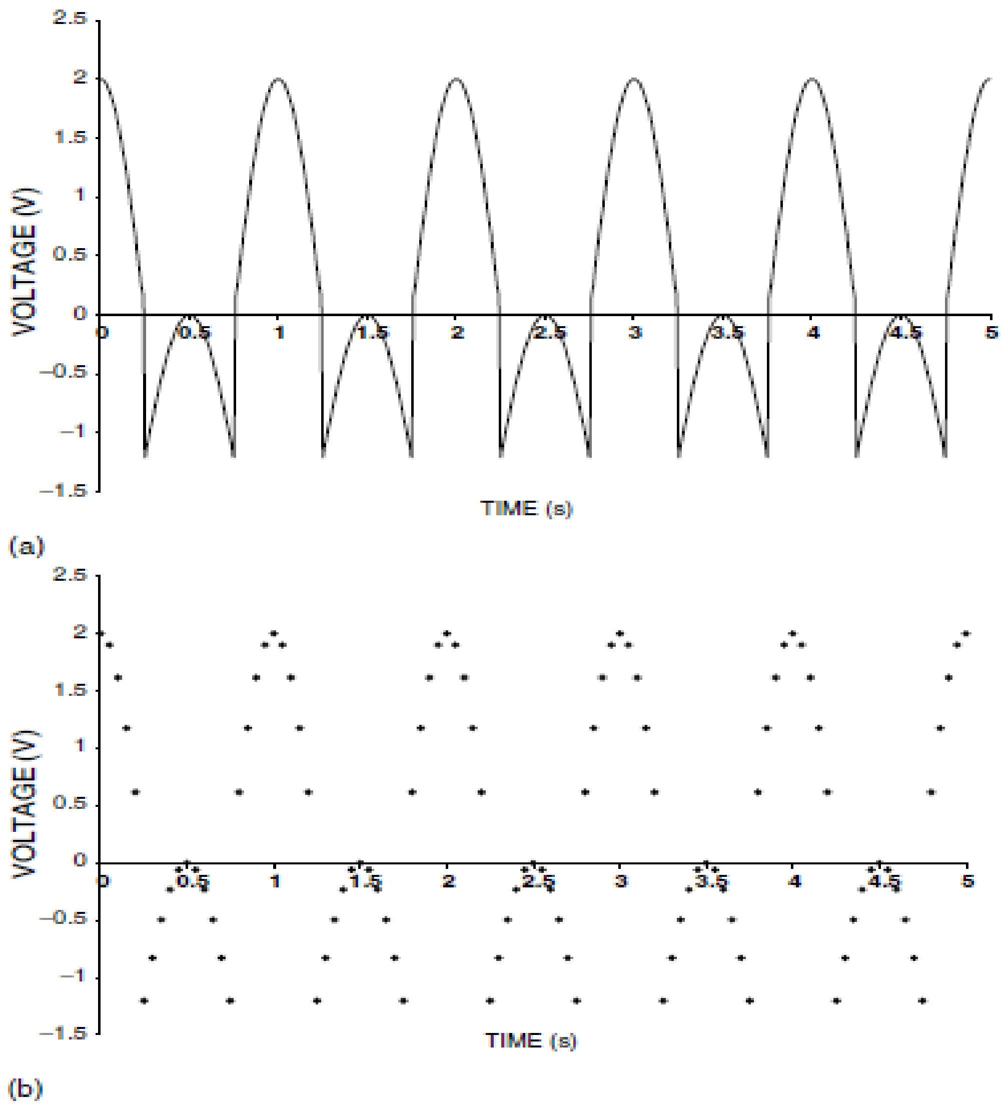
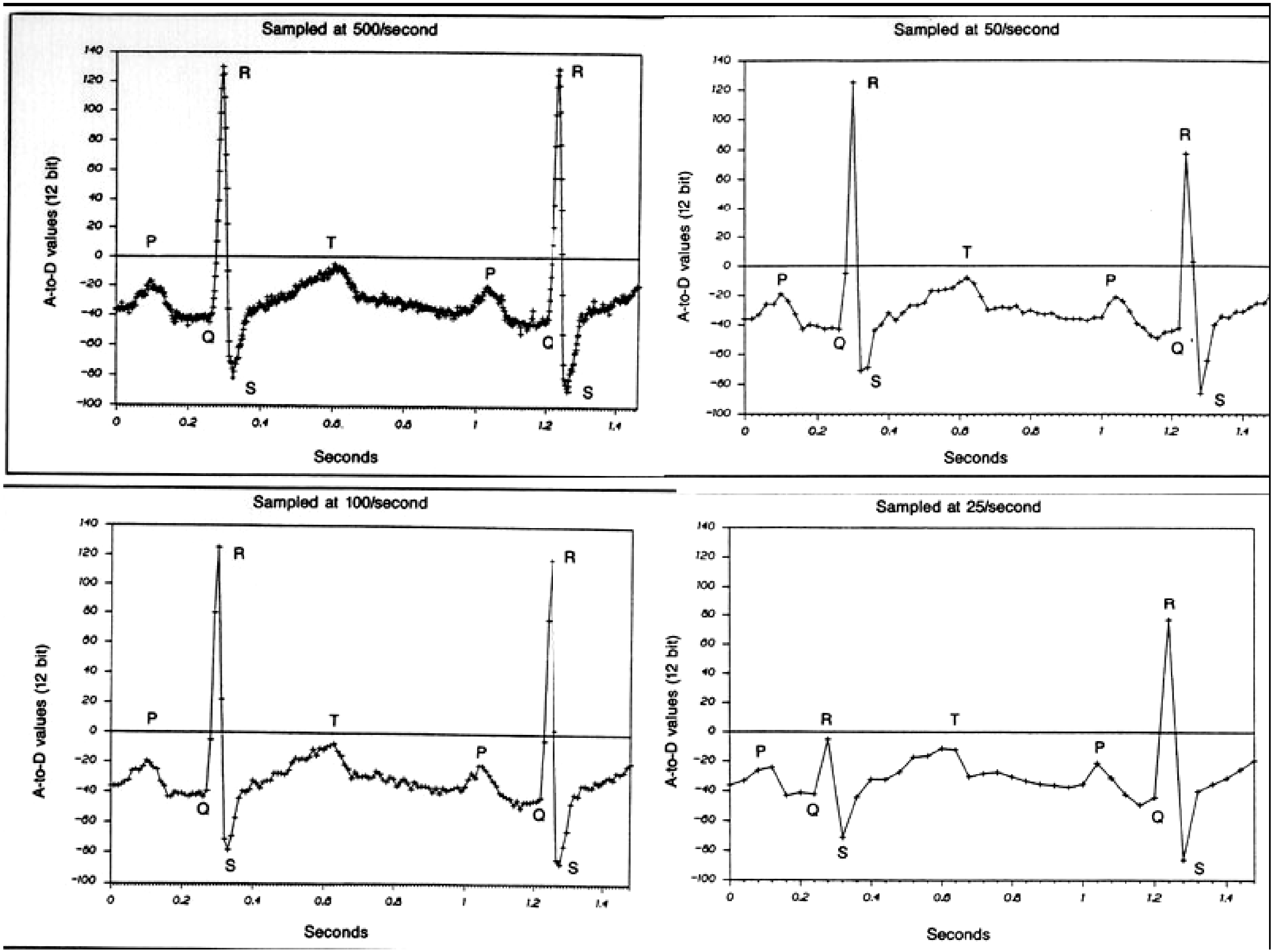



**Figure 10.5** (a) Analog version of a periodic signal. (b) Digital version of the analog signal.

۲۱

# اثر تغيير فركانس نمونه برداري



# اثر نمونه برداري زير نرخ نايكوئيست

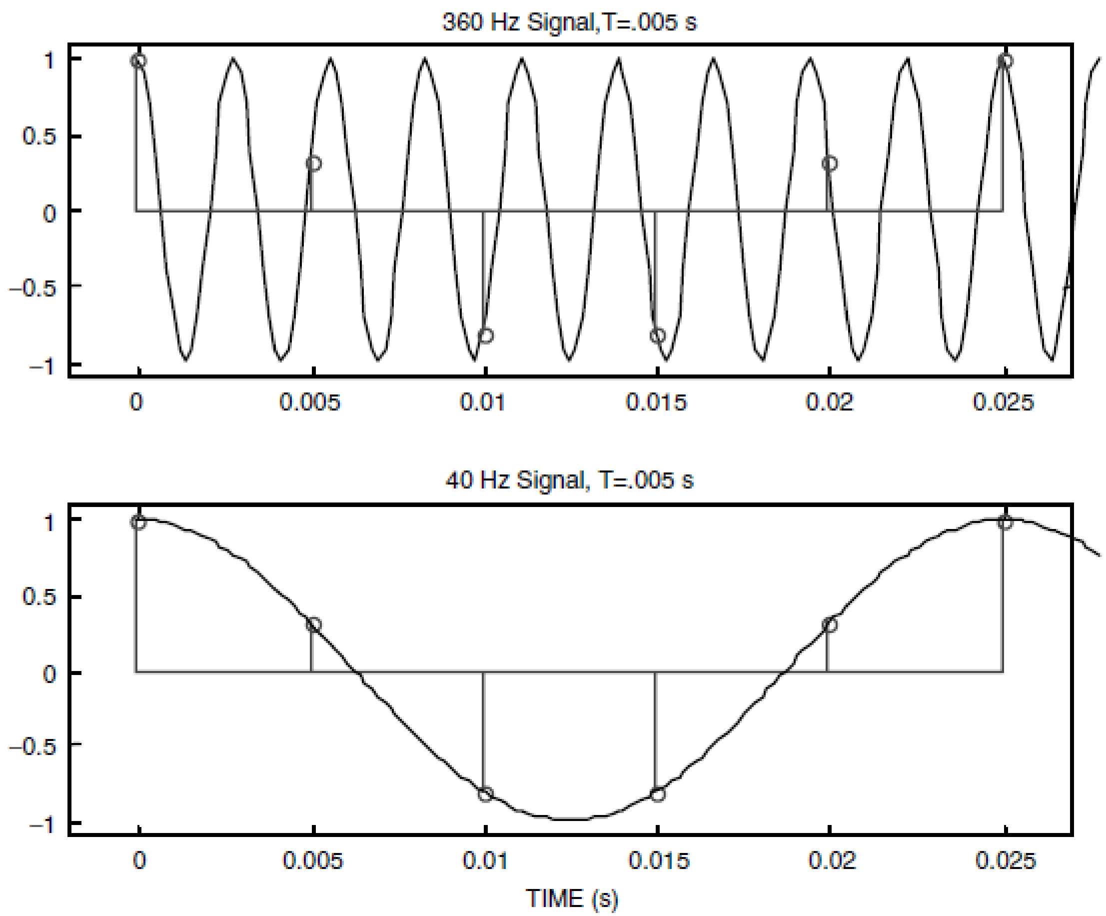
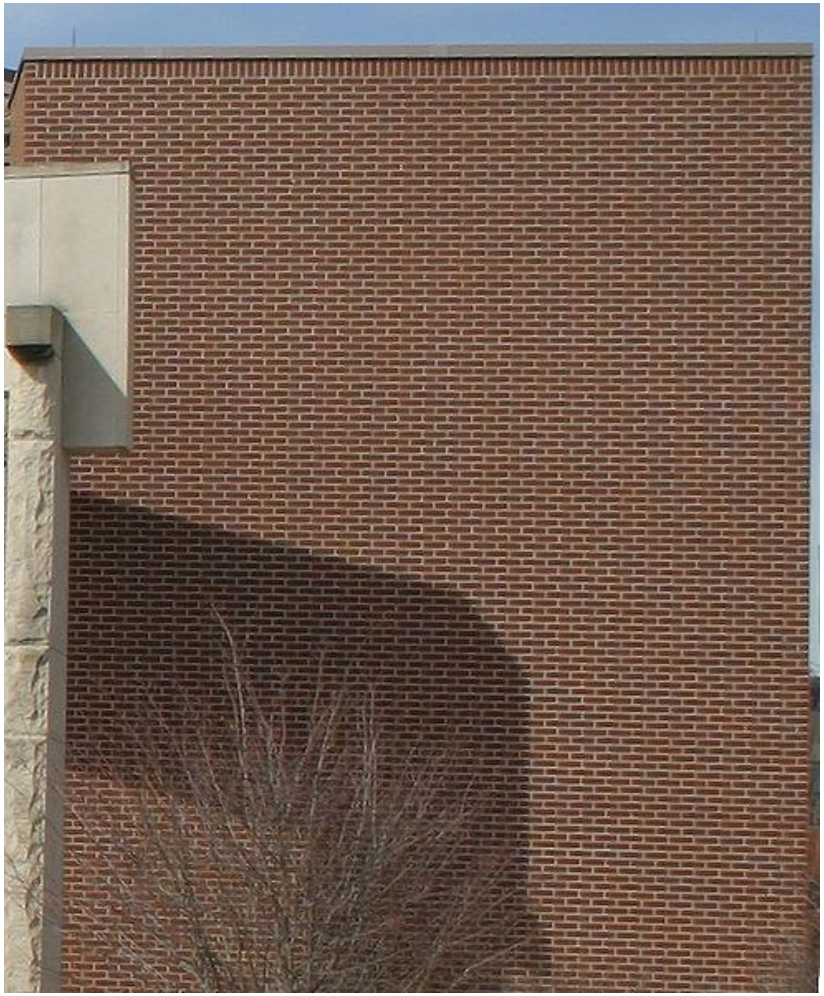



**Figure 10.6** A 36 Hz sine wave is sampled every 5 ms (i.e., at 200 samples/s). This sampling rate will adequately sample a 40 Hz sine wave, but not a 36 Hz sine wave.

# اثر نمونه برداري زير نرخ نايكوئيست

# نمونه برداري

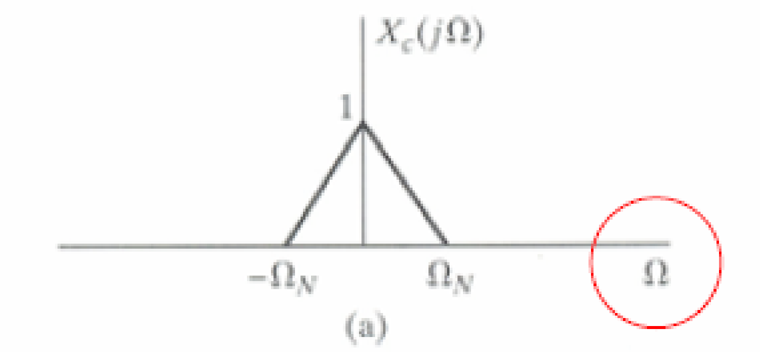
- هرچه نرخ نمونه برداری زیاد باشد
  - دقت بیشتر
  - حجم داده بیشتر (نیاز به حافظه و پردازش بیشتر )

- هرچه نرخ نمونه برداری کم باشد
  - دقت کمتر (ممکن است )
  - حجم داده کمتر(نیاز به حافظه و پردازش کمتر)

- پیدا کردن حداقل فرکانس نمونه برداری
  - حداقل حجم داده و قابلیت بازیابی سیگنال

# نمونه برداري

- فرض کنید x(t) یک سیگنال در حوزه زمان باشد که تبدیل فوریه آن در حوزه فرکانس محدود باشد



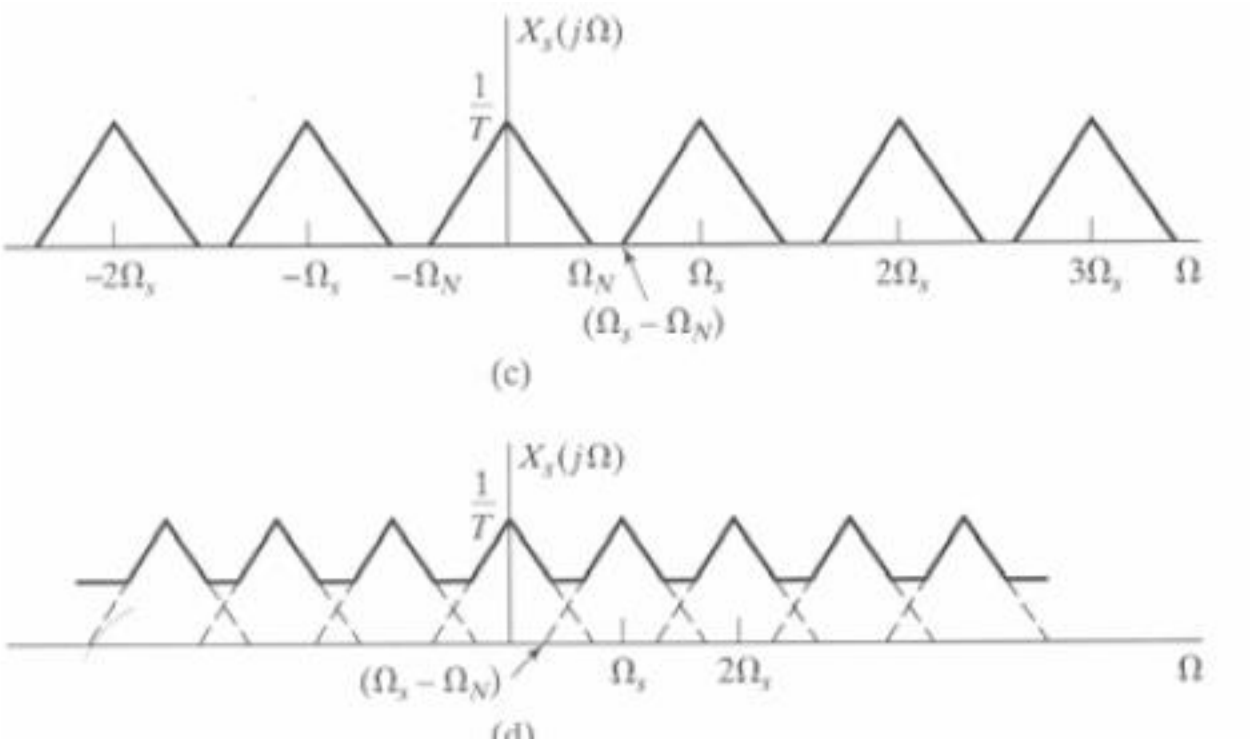

- با توجه به اینکه برای نمونه برداری از یک سیگنال متناوب با فرکانس $\Omega_S$ استفاده می کنیم و دارای سری فوریه است داریم

$$s(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\Omega_S t} \xrightarrow{F} S(j\Omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\Omega-k\Omega_S)$$

$$\Rightarrow x(t).s(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} X(j\Omega) * S(j\Omega)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k X(\Omega-k\Omega_S)$$

# نرخ نایکوییست




- اگر

$$\Omega_S - \Omega_N > \Omega_N \Rightarrow \Omega_S > 2\Omega_N$$

سیگنال با یک فیلتر قابل بازیابی است. به $2\Omega_N$ نرخ نایکوییست گوییم.

# نرخ نایکوییست

$$\Omega_S > 2\Omega_N \xrightarrow{T_S = \frac{2\pi}{\Omega_S}} \frac{2\pi}{T_S} > 2\Omega_N \longrightarrow T_S < \frac{\pi}{\Omega_N}$$

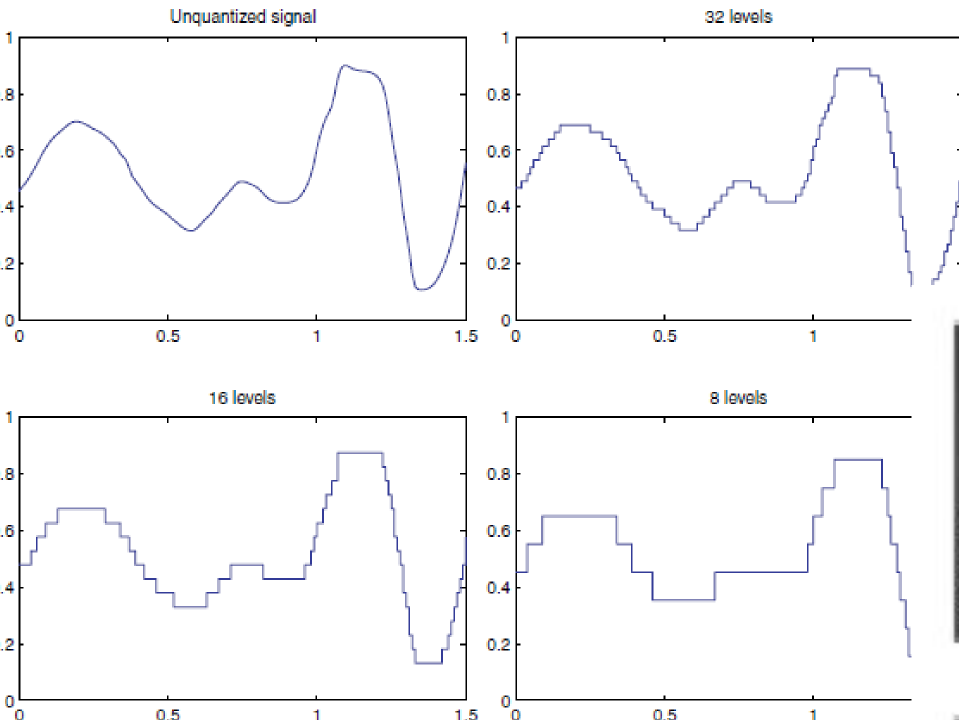
- مثال : نرخ نایکوییست را برای x(t)=cos100t محاسبه کنید.

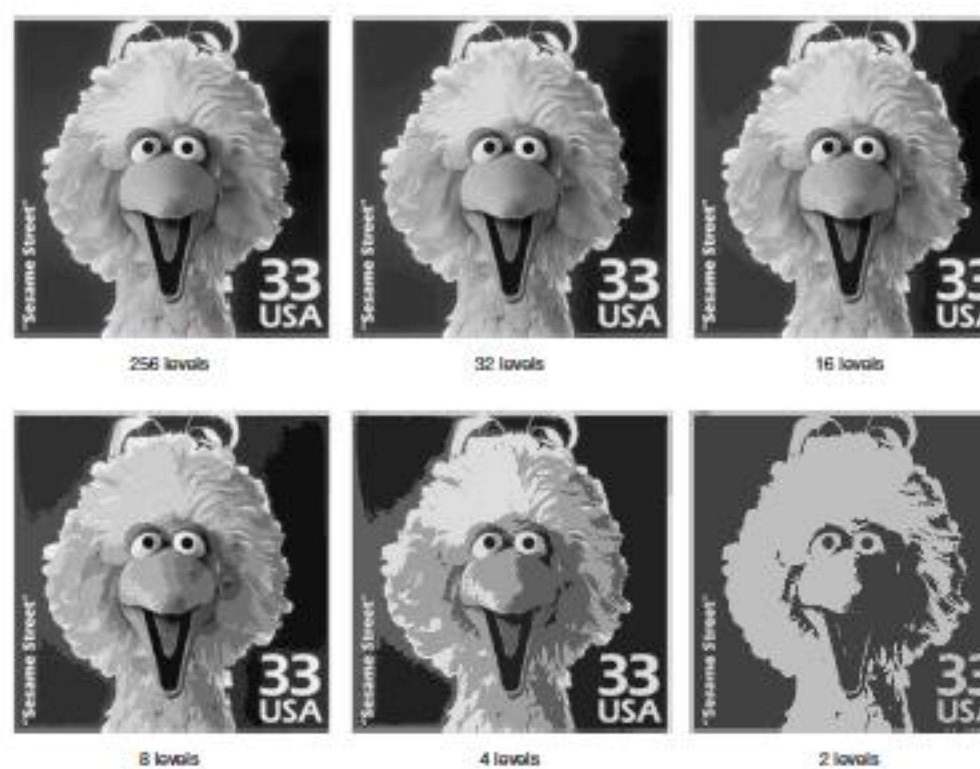
$$\cos(100t) \xrightarrow{F} \pi(\delta(\Omega - 100) + \delta(\Omega + 100))$$

$$\Rightarrow \Omega_N = 100 \Rightarrow \Omega_S > 2\Omega_N = 200$$

# چندی سازی (کوانتیزاسیون)

- دقت کنید کامپیوتر محدودیت دارد و برای هر عدد تعدادی بیت می تواند اختصاص دهد

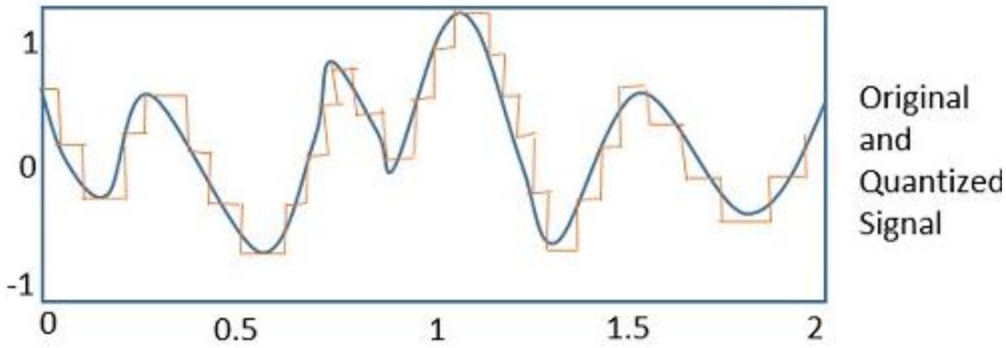


# چندی سازی (کوانتیزاسیون)

- نمایش اندازه نمونه های آنالوگ به تعدادی از سطوح مختلف
  - ممکن است مقداری از اطلاعات از بین برود

- ساده ترین راه برای کوانتیزاسیون: کوانتیزاسیون یکنواخت



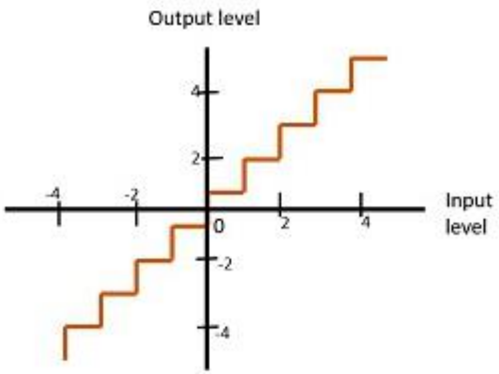




Fig 1 : Mid-Rise type Uniform Quantization

# چندی سازی یکنواخت

- فرض کنید **x(t)** در بازه (۱ و ۱−) باشد و **M** بیت برای نمایش آن عدد داشته باشیم. تابع کوانتیزاسیون به صورت زیر عمل می کند:

$$Q(x) = \frac{\left\lfloor 2^{M-1} x \right\rfloor + 0.5}{2^{M-1}}$$

- مثال: فرض کنید **M=1** در این صورت:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{-1}{2} & -1 \le x < 0 & 0 \\ \dfrac{-1}{2} & 0 \le x < 1 & 1 \end{array} \right\}$$

# چندی سازی یکنواخت

- مثال: فرض کنید M=2 در این صورت:

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
\frac{-3}{4} & -1 \le x < \frac{-1}{2} & 00 \\
\frac{-1}{4} & \frac{-1}{2} \le x < 0 & 01 \\
\frac{1}{4} & 0 \le x < \frac{1}{2} & 10 \\
\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \le x < 1 & 11
\end{array}
\right\}
$$

# چندی سازی یکنواخت

- اگر بازه $x(t)$ به جای (۱ و ۱-) در بازه $(a,b)$ بود با تغییر متغیر

$$y=\frac{x-\frac{(a+b)}{2}}{\frac{b-a}{2}}$$

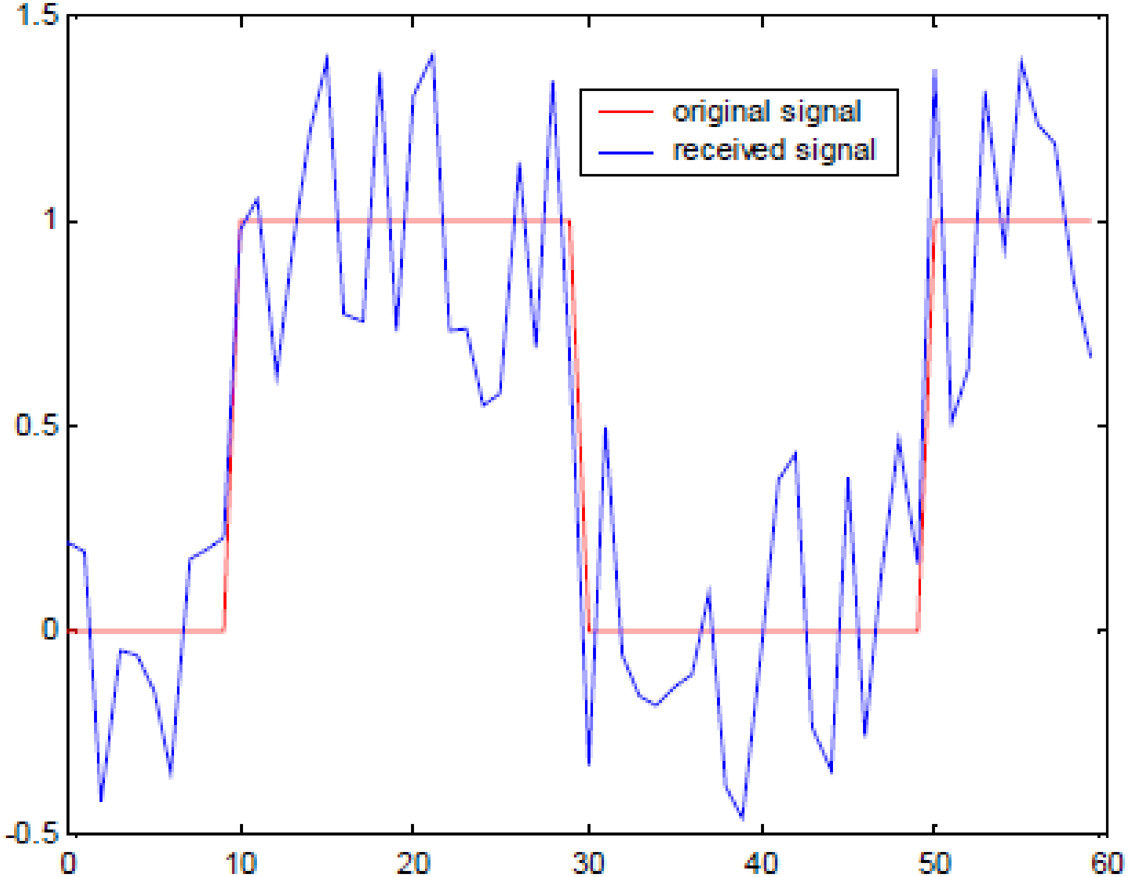
$Q$ به صورت زیر خواهد بود:

$$Q(x)=\frac{b-a}{2}*\frac{\lfloor 2^{M-1}*y\rfloor+0.5}{2^{M-1}}+\frac{b+a}{2}$$

تمرین: فرض کنید $M=3$ و بازه $x(t)$ در بازه ۲ تا ۷ باشد. تابع $Q$ و سطوح آن را به دست آورید.

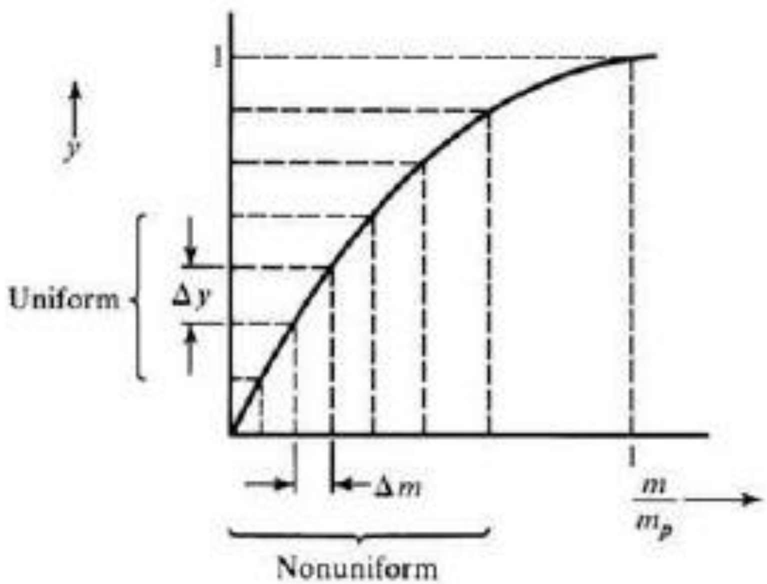
# چندی سازی غیر یکنواخت

- در بعضی کاربردها ممکن است بازه بزرگ باشد ولی تجمع مقادیر در نقاطی بیشتر باشد (مانند صوت)

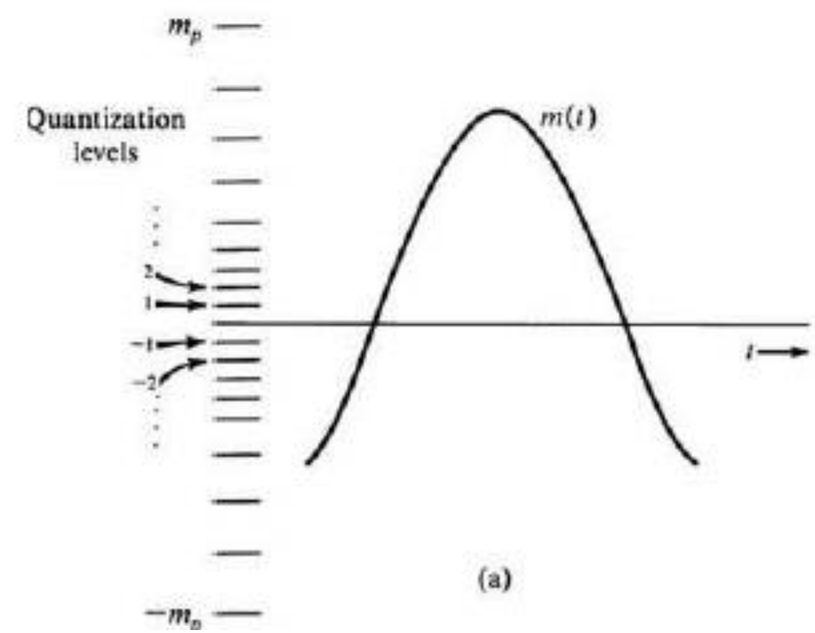


# چندی سازی غیر یکنواخت

- در این صورت ابتدا $x(t)$ از یک تابع مانند $F$ عبور می کند و سپس عملیات کوانتیزاسیون انجام می شود:




$\Rightarrow$



# چندی سازی غیر یکنواخت

- یکی از مهمترین چندی سازی های غیر یکنواخت برای سیگنال صوت است.

- $\mu$-law: North America and Japan. For $\mu = 255$ (for 8-bit codes),

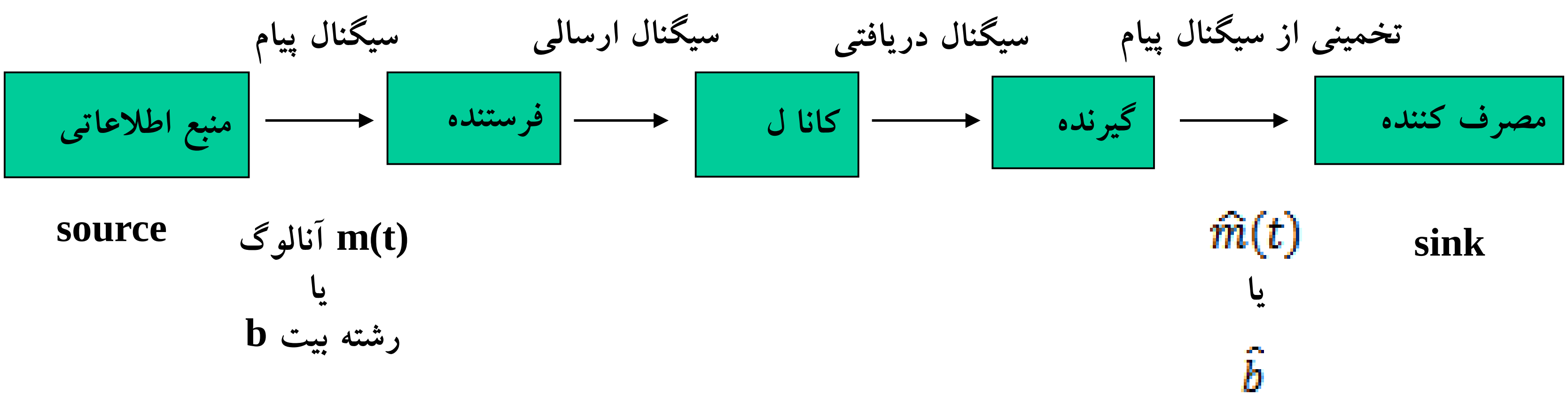
$$y = \operatorname{sgn}(x)\frac{1}{\ln(1+\mu)}\ln\left(1+\mu|x|\right), \quad (0 < x < 1)$$

- A-law: Europe, rest of world.

$$y = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x)\dfrac{A|x|}{1+\ln(A)} & |x| < \dfrac{1}{A} \\ \operatorname{sgn}(x)\dfrac{1+\ln(A|x|)}{1+\ln(A)} & \dfrac{1}{A} < |x| < 1 \end{cases}$$

The standard value is $A = 87.7$.

- دیاگرام کلی یک سیستم مخابراتی:




- هدف: بررسی قسمتهای مختلف یک چنین سیستمی و ارزیابی عملکرد آن در حالتهای مختلف

# مثلثات (یادآوری)

$$a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta - \arctan\frac{b}{a})$$

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)) \rightarrow \sin(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sin(2\alpha)$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)) \rightarrow \cos^2(\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\alpha)$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)) \rightarrow \sin^2(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\alpha)$$

**Euler Equation :** $\exp(j\alpha) = \cos(\alpha) + j\sin(\alpha)$

(Can be easily proved by Taylor series expansion)

# تبدیل فوریه

- f : فرکانس موج
- $w$: فرکانس زاویه ای

$$\omega = 2\pi f$$

- دسته بندی سیگنال‌های مورد استفاده در درس:
  - توان (سیگنال های متناوب) سری فوریه
  - انرژی (سیگنال های محدود) تبدیل فوریه

# سری فوریه

- فرض کنید v(t) یک سیگنال توان (متناوب) با دوره تناوب T0 ‏(f0=1/T0) باشد در این صورت سری فوریه آن به صورت زیر است:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

که ضرایب سری فوریه برابر است با:

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt$$

مقدار dc یک سیگنال متناوب

$$c(0) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t)\, dt = \langle v(t) \rangle$$

اگر سیگنال حقیقی باشد:

$$c_{-n} = c_n^* = |c_n|\, e^{-j \arg c_n}$$

توان سیگنال

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

# تبدیل فوریه (سیگنال های انرژی)

Definition (Fourier Transform)

$$X(f) = \int x(t)\exp(-j2\pi ft)dt$$

$$x(t) = \int X(f)\exp(j2\pi ft)df$$

$x(at) \rightarrow \frac{1}{|a|}X(\frac{f}{a})$ Time-frequency reciprocity

$x(t-t_0) \rightarrow \exp(-j2\pi t_0 f)X(f)$ Time shift does not frequency band

It is **MULTIPLYING BY SINUSOIDS** that changes the frequency band

$$x(t)\exp(j2\pi f_c t) \rightarrow X(f-f_c)$$

$$x(t)\cos(2\pi f_c t) \rightarrow \frac{1}{2}(X(f-f_c)+X(f+f_c))$$

$$x(t)\sin(2\pi f_c t) \rightarrow \frac{1}{2j}(X(f-f_c)-X(f+f_c))$$

# مثال

- تبدیل فوریه سیگنال زیر را به دست آورید.

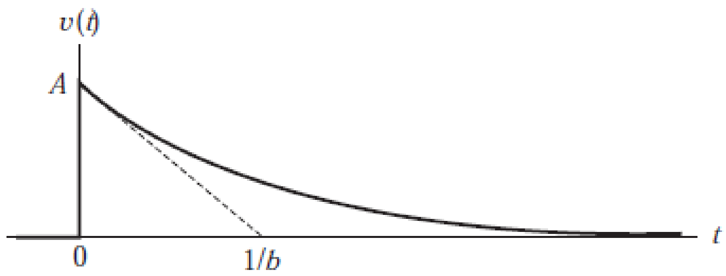
$$v(t) = \begin{cases} Ae^{-bt} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

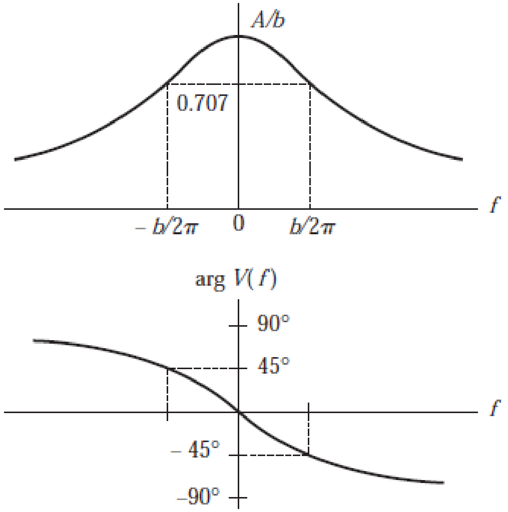
- حل

$$V(f) = \frac{A}{b + j2\pi f} = \frac{b - j2\pi f}{b^2 + (2\pi f)^2} A$$

$$V_e(f) = \text{Re}[V(f)] = \frac{bA}{b^2 + (2\pi f)^2}$$

$$V_o(f) = \text{Im}[V(f)] = -\frac{2\pi f A}{b^2 + (2\pi f)^2}$$



# ویژگی های تبدیل فوریه

- **قضیه پارسوال و رایلی**

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} V(f)V^*(f)\,df = \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2\,df$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t)w^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} V(f)W^*(f)\,df$$

- **دوگانی**

$$V(f) = \mathscr{F}[v(t)] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-j2\pi ft}\,dt \quad \Longrightarrow \quad z(t) = V(t)$$

$$\mathscr{F}[z(t)] = v(-f)$$

# ویژگی های تبدیل فوریه

- انتگرال

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \rightarrow \frac{X(f)}{j2\pi f} \quad (\text{if } X(0) = 0)$$

- مشتق

$$\frac{d}{dt}v(t) \leftrightarrow j2\pi f V(f)$$

- و تعمیم

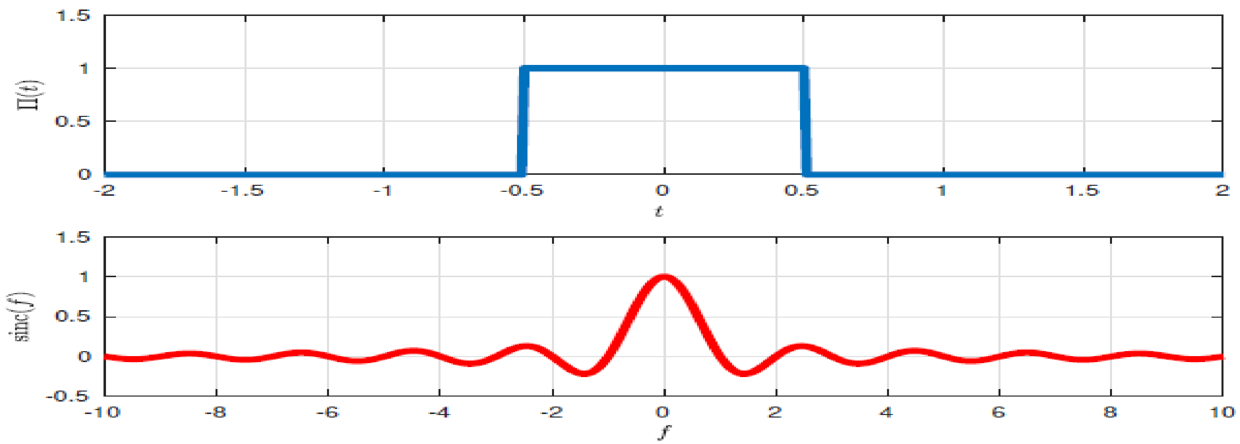
$$\frac{d^n}{dt^n}v(t) \leftrightarrow (j2\pi f)^n V(f)$$

# مثال

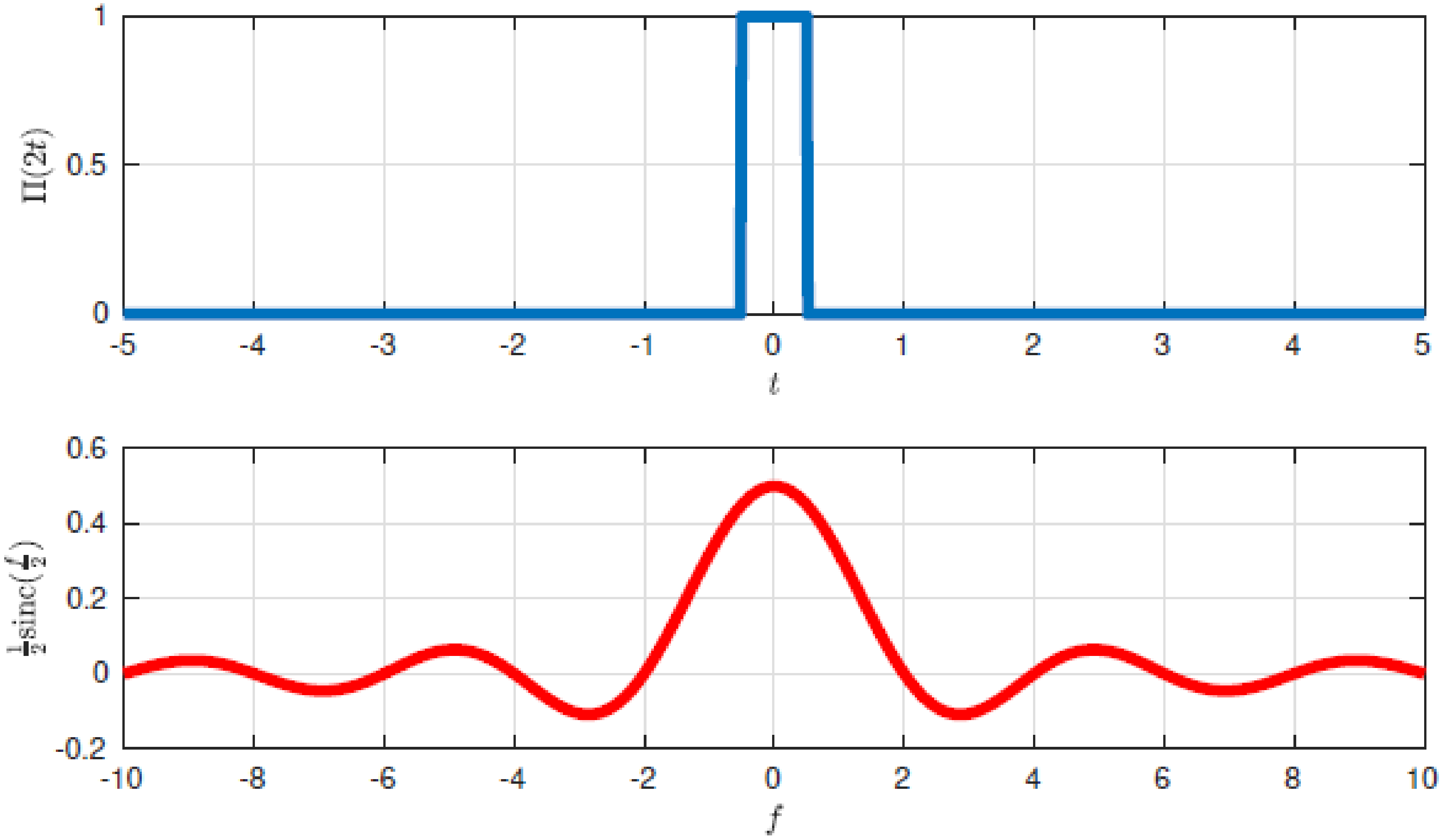
$$x(t) = \Pi(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$X(f) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \exp(-j2\pi f t) dt = \frac{1}{-j2\pi f} \exp(-j2\pi f t)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{-2j \sin(\pi f)}{-j2\pi f} = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} = \mathrm{sinc}(f)$$



# ادامه مثال



1
0.5
0
$\Pi(2t)$
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
$t$
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
$\frac{1}{2}\mathrm{sinc}(\frac{f}{2})$
-10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8 10
$f$

# سپاس